

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE M'SILA MOHAMED BOUDIAF
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES ET D'INFORMATIQUES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
Mémoire de fin d'étude présenté pour l'obtention du diplôme de

* * * * * **Master** * * * * *

Domaine : Mathématiques et Informatique

Filière : Mathématiques

Option : EDPs et Application

Rédige Par

Achour.Hayet

THEME

RESULTATS D'EXISTENCE DE PROBLEME AUX LIMITES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES FRACTIONNAIRES NON LINEAIRES

Devant de jury :

MC/A	Président	Univ de M'sila
MC/A	Encadreur	Univ de M'sila
MA/A	Examineur	Univ de M'sila

Année : 2017/2018

Remerciements

Je remercie avant tout mon dieu Allah qui m'a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire Monsieur Arioua Yacine qui s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi que pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il a bien voulu nous consacrer pour son soutien, sa confiance et son enseignement toujours judicieux et rigoureux durant toutes les phases de ce mémoire. Qu'ils trouvent ici l'expression de nos sincères gratitude.

Nous adressons également notre profonde gratitude à tous les professeurs de l'université de M'sila en particulier ceux du département de Mathématique et Informatique.

Je voudrais également remercier mon père ma mère, toute ma famille.

Merci

Table des matières

Introduction	3
1 Notions de base relatives au calcul fractionnaire	4
1.1 Espaces d'intégration et fonctions absolument continues	4
1.2 Fonctions Spéciales	5
1.2.1 Fonction Gamma d'Euler	5
1.2.2 La fonction Bêta	8
1.3 Intégrales fractionnaires	9
1.3.1 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville	10
1.3.2 L'intégrale fractionnaire de Hadamard	12
1.4 Dérivées fractionnaires	14
1.4.1 Dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville	14
1.4.2 Dérivées fractionnaires de Caputo	17
1.4.3 Dérivées fractionnaires de Hadamard	20
2 Equations différentielles fractionnaires de type Hadamard	23
2.1 Quelques théorèmes de point fixe	23
2.2 Lemmes fondamentaux	25
2.3 Résultats d'existence et d'unicité	28
2.4 Exemples	33
3 Système d'equations différentielles fractionnaires de type Hadamard	36
3.1 Lemmes fondamentaux	36

3.2	Résultats d'existence et d'unicité	38
3.3	Exemple	43
	Conclusion	45
	Bibliographie	45

Introduction

La question des dérivés fractionnaires est abordée dès 1695 par Leibnitz dans une lettre de L'Hospital, mais lorsque celui-ci lui demande quelle pourrait être la dérivée d'ordre un demi de la fonction f , Leibnitz répond que cela même à un paradoxe dont on tirera un jour d'utiles conséquences. Plus de 300 ans après, on commence seulement à venir à bout des difficultés.

De nombreux mathématiciens se sont penchés sur cette question, en particulier Euler (1730), Fourier (1822), Abel (1823), Liouville (1832), Riemann (1847), etc... Différentes approches ont été utilisées pour généraliser la notion de dérivation aux ordres non-entiers.

- La limite du taux d'accroissement d'une fonction se généralise sous la forme de la formule de Grunwald-Letnikov, très utile numériquement,
- L'intégration, opération inverse, via la formule intégrale de Liouville, mène aux formules de Riemann-Liouville et de Caputo et de Hadamard.
- Enfin les transformations de Fourier et de Laplace associent la dérivation fractionnaire à une multiplication par $(i\xi)^\alpha$ ou p^α avec α non entier.

Le calcul fractionnaire est une généralisation du calcul différentiel. C'est Lacroix (1879) qui montre que pour $f(t) = t^a$ et $a > 0$,

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}}{dt^{\frac{1}{2}}} f(t) = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})} t^{a-\frac{1}{2}}$$

Ensuite, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Weyl, Riez, Marchaud et Caputo, entre autres, ont contribué au développement du calcul fractionnaire dans lequel on définit les dérivées et intégrales non entières.

Dans ce cadre et pour notre support bibliographique nous nous sommes appuyés principalement sur les ouvrages de Samko, Kilbas et Marichev ([?], 1993), celui de Rubin ([10], 1996) ainsi que Kilbas, Srivastava et Trujillo ([7], 2006).

Les équations différentielles d'ordre fractionnaire sont des généralisations des équations différentielles classiques, qui sont utilisées par exemple dans certains domaines de la physique faisant intervenir des phénomènes de diffusion comme l'électromagnétisme, l'acoustique ou la thermique.

On propose dans ce travail, de faire une synthèse de certains travaux sur l'existence et l'unicité de quelque équations et systèmes différentielles fractionnaires de type Hadamard avec certaine conditions aux limites. Cette étude est basé sur les travaux de B. Ahmad, A. Alsaedi, S. K. Ntouyas, et J. Tariboon ([1], [2], [3]).

Ce mémoire est réparti en trois chapitres.:

Le premier chapitre sera consacré aux notions de base et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fractionnaire, un rappel et quelques concepts préliminaires seront introduits comme la fonction Gamma, la fonction Bêta, qui joue un rôle important dans la théorie de calcul fractionnaire, et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : l'intégration fractionnaire, la dérivation fractionnaire au sens Riemann-Liouville, Caputo, et celle de Hadamard, qui sont les plus utilisées.

Dans le seconde chapitre, on abordera la question d'existence et d'unicité de la solution pour le problème aux limites d'équation différentielle d'ordre fractionnaire de type Hadamard suivant :

$$\begin{cases} {}^H\mathcal{D}^\alpha u(t) = f(t, u), \quad 1 < t < e, \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ u(1) = 0, \quad u(e) = \mathcal{I}_{1+}^\beta u(e) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\beta-1} \frac{u(s)}{s} ds, \quad \beta > 0 \end{cases},$$

où ${}^H\mathcal{D}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Hadamard, $f : [1, e] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

Dans le troisième chapitre on va considérer un problème étudiée par Ahmad. B dans [1], c'est le problème aux limites d'un système d'équation différentielle fractionnaire de type

Hadamard s'écrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^H\mathcal{D}^\alpha u(t) = f(t, u(t), v(t)), \quad 1 < t < e, \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ {}^H\mathcal{D}^\beta v(t) = g(t, u(t), v(t)), \quad 1 < t < e, \quad 1 < \beta \leq 2 \\ u(1) = 0, \quad u(e) = \mathcal{J}^\gamma u(\sigma_1) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_1^{\sigma_1} \log\left(\frac{\sigma_1}{s}\right)^{\gamma-1} \frac{u(s)}{s} ds, \quad \gamma > 0, \quad 1 < \sigma_1 < e \\ v(1) = 0, \quad v(e) = \mathcal{J}^\gamma v(\sigma_2) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_1^{\sigma_2} \log\left(\frac{\sigma_2}{s}\right)^{\gamma-1} \frac{v(s)}{s} ds, \quad \gamma > 0, \quad 1 < \sigma_2 < e \end{array} \right.,$$

Où $\mathcal{D}^\delta$, ($\delta = \alpha, \beta$), est la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre δ , $\mathcal{J}^\gamma$ est l'intégrale fractionnaire d'ordre γ , $f, g : [1; e] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

L'existence et l'unicité d'une solution continue de tous les problèmes est établit par la transformation de ce problème à une équation intégrale équivalente, dont la solution est identi ée à un point fixe d'un opérateur contractant (sous certaines hypothèses sur la fonction f) dans un espace fonctionnel convenablement choisi.

Chapitre 1

Notions de base relatives au calcul fractionnaire

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans la quelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fractionnaire. Nous présentons également les fonctions Gamma, Bêta, qui seront utilisées dans les autres chapitres. Ces fonctions jouent un rôle très important dans la théorie du calcul fractionnaire.

1.1 Espaces d'intégration et fonctions absolument continues

Dans cette section, nous présentons des définitions d'espaces des fonctions p -intégrables, absolument continues, et les fonctions continues et leurs modifications pondérées. Nous donnons également les caractérisations de ces espaces modifiés qui seront utilisés plus tard.

Soit $\Omega = [a, b]$, $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$, un intervalle fini ou infini de $\mathbb{R}$. Nous désignons par $L^p(a, b)$ ($1 \leq p \leq +\infty$) l'ensemble des fonctions mesurables f sur Ω avec $\|f\| < +\infty$, où

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 < p \leq +\infty$$

et

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \leq t \leq b} |f(t)|.$$

Maintenant soit $[a, b]$, $(-\infty < a < b < +\infty)$, un intervalle fini de $\mathbb{R}$. Nous désignons par $AC[a, b]$ l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$, où

$$f(t) \in AC[a, b] \Leftrightarrow f(t) = c + \int_a^t \varphi(\tau) d\tau, \quad \varphi(\tau) \in L^1(a, b),$$

et donc une fonction absolument continue $f(t)$ a une dérivée $f'(t) = \varphi(t)$ presque partout sur $[a, b]$, et $f(a) = c$.

Pour $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$, on note $AC^n[a, b]$, l'espace des fonctions $f(t)$ ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre $n - 1$ sur $[a, b]$ tel que

$$f^{n-1} \in AC[a, b] :$$

$$AC^n[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / f^{n-1}(t) \in AC[a, b]\}$$

En particulier, $AC^1[a, b] = AC[a, b]$.

Nous utilisons également une modification pondérée de l'espace $AC^n[a, b]$, dans laquelle la dérivée usuelle $D = \frac{d}{dt}$ est remplacée par la dérivée dite δ -dérivée, définie par $\delta = tD = t \frac{d}{dt}$.

Nous désignons par $AC_{\delta, \mu}^n[a, b]$, ($n \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{R}$), l'espace des fonctions mesurables g sur (a, b) telles que $t^\mu g(t)$ a une δ -dérivées jusqu'à l'ordre $n - 1$ sur $[a, b]$ et $\delta^{n-1}[t^\mu g(t)]$ est absolument continu sur $[a, b]$:

$$AC_{\delta, \mu}^n[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / \delta^{n-1}[t^\mu g(t)] \in AC[a, b]\}.$$

En particulier, lorsque $\mu = 0$, l'espace $AC_\delta^n[a, b] = AC_{\delta, 0}^n[a, b]$ est défini par :

$$AC_\delta^n[a, b] = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} / \delta^{n-1}g(t) \in AC[a, b]\}.$$

Si $\mu = 0$ et $n = 1$, l'espace $AC_{\delta, \mu}^n[a, b]$ coïncide avec $AC[a, b]$.

1.2 Fonctions Spéciales

1.2.1 Fonction Gamma d'Euler

Définition 1.2.1 On appelle Gamma la fonction définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad (z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0).$$

avec $t^{z-1} = e^{(z-1) \ln t}$.

Exemple 1.2.1 1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$.

2. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \int_0^{+\infty} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\tau^2} d\tau = \sqrt{\pi}$ (posant le changement de variable $t = \tau^2$).

Lemme 1.2.1 La fonction Gamma est une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, (resp. holomorphe sur le demi plan $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0$) et

$$\forall k \in \mathbb{N}^*. \forall z \in \mathbb{R}_+^* \text{ (resp. } z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0); \Gamma^{(k)}(z) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Lemme 1.2.2 Pour tout $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(z) > 0, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} 1. \quad \Gamma(z+1) &= z\Gamma(z). \\ 2. \quad \Gamma(n) &= (n-1)!. \\ 3. \quad \Gamma(n + \frac{1}{2}) &= \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}. \end{aligned}$$

Preuve.

1. Représentons $\Gamma(z+1)$ par l'intégrale d'Euler et intégrons par parties:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^{+\infty} t^z e^{-t} dt = [-t^z e^{-t}]_0^{+\infty} + z \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \\ &= z\Gamma(z). \end{aligned}$$

2. Il suffit d'appliquons 1 pour $z = n-1$.

3. Nous allons démontrer la formule $\Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

-Pour $n = 0$, on a $\Gamma(0 + \frac{1}{2}) = \frac{(0)!\sqrt{\pi}}{4^0 0!} = \sqrt{\pi}$.

-Supposons que la formule est vérifiée pour $(n-1)$ et considérons n . C-à-d que supposons que $\Gamma((n-1) + \frac{1}{2}) = \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!}$, vérifié. Alors

$$\begin{aligned} \Gamma(n + \frac{1}{2}) &= (n - \frac{1}{2})\Gamma(n - \frac{1}{2}) = (n - \frac{1}{2}) \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\ &= \left(\frac{2n-1}{2}\right) \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\ &= \frac{2n}{2n} \frac{(2n-1)}{2} \frac{(2(n-1))!\sqrt{\pi}}{4^{(n-1)}(n-1)!} \\ &= \frac{(2n)!}{4^n n!} \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

Donc la formule est vérifiée pour n .

■

Remarque 1.2.1 La détermination de la fonction Gamma pour les valeurs négatives non entières par la formule

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z},$$

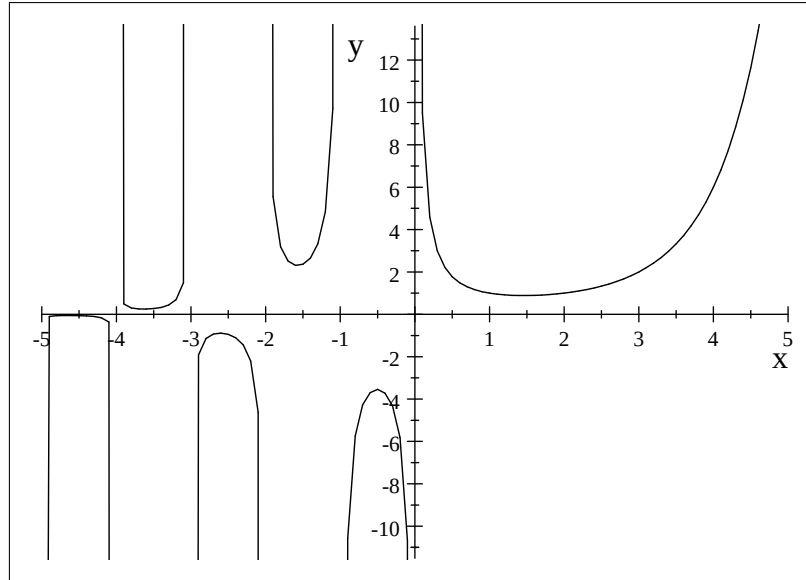
et la transition d'un intervalle à un autre $(-1, 0), (-2, -1), (-3, -2), \dots$

La fonction Gamma n'existe pas pour les valeurs négatives entières.

Exemple 1.2.2 1) $\Gamma(-\frac{1}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2}+1)}{-\frac{1}{2}} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2}} = -2\sqrt{\pi}$.

2) $\Gamma(-\frac{3}{2}) = \frac{\Gamma(-\frac{3}{2}+1)}{-\frac{3}{2}} = \frac{\Gamma(-\frac{1}{2})}{-\frac{3}{2}} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{-\frac{3}{2}} = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$.

Graphique de la fonction $\Gamma(z)$.



Graphique de la fonction Γ d'Euler

Proposition 1.2.1 Pour tout $p > 0$, on a

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n n!}{p(p+1)(p+2) \dots (p+n)}.$$

Preuve. Considérons la fonction

$$f(n, p) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{p-1} dt.$$

On peut facilement voir que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n, p) = \Gamma(p).$$

D'une autre part, par l'intégration par parties on obtient

$$\begin{aligned} f(n, p) &= \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{p-1} dt = \left[\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{t^p}{p} \right]_0^n + \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^p dt \\ &= \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^p dt, \end{aligned}$$

encore fois, en intégrant par parties

$$\begin{aligned} f(n, p) &= \frac{1}{p} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} t^p dt \\ &= \frac{1}{p} \left[\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \frac{t^{p+1}}{p+1} \right]_0^n + \frac{(n-1)}{np(p+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{p+1} dt \\ &= \frac{n(n-1)}{n^2 p(p+1)} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-2} t^{p+1} dt, \end{aligned}$$

après l'intégration par parties n fois, on obtient

$$\begin{aligned} f(n, p) &= \frac{n(n-1) \dots [n - (n-1)]}{n^n p(p+1) \dots [p + (n-1)]} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-n} t^{p+(n-1)} dt \\ &= \frac{n!}{n^n p(p+1) \dots [p + (n-1)]} \left[\frac{t^{n+p}}{n+p} \right]_0^n \\ &= \frac{n! n^p}{p(p+1) \dots (p+n)}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^p}{p(p+1)(p+2) \dots (p+n)}.$$

■

1.2.2 La fonction Bêta

Définition 1.2.2 La fonction de Bêta est un type d'intégrale d'Euler définie par

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt, \quad (p, q \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}(p) > 0, \operatorname{Re}(q) > 0).$$

Pour tout $p, q \in \mathbb{C}$, avec $\operatorname{Re}(p) > 0$, $\operatorname{Re}(q) > 0$, on a

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Preuve. Soit $D = (0, +\infty) \times (0, +\infty)$, on a

$$\begin{aligned}\Gamma(p)\Gamma(q) &= \left(\int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx\right) \left(\int_0^{+\infty} y^{q-1} e^{-y} dy\right) \\ &= \int \int_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy.\end{aligned}$$

En utilisant un changement de cordonnée, considérons les nouvelles cordonnées :

$$\begin{cases} u = x + y \\ v = \frac{x}{x+y} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = uv \\ y = u(1-v) \end{cases},$$

et

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{vmatrix} = -uv - u(1-v) = -u$$

De même que le domaine D' correspondant à D dans les cordonnées u, v est

$$D' = \{(u, v) / u \geq 0, 0 \leq v \leq 1\}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int \int_D x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy &= \int \int_{D'} (uv)^{p-1} (u(1-v))^{q-1} e^{-u} | -u | dudv \\ &= \int \int_{D'} u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} dudv \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 u^{p+q-1} v^{p-1} (1-v)^{q-1} e^{-u} dudv \\ &= \left(\int_0^{+\infty} u^{p+q-1} e^{-u} du\right) \int_0^1 v^{p-1} (1-v)^{q-1} dv \\ &= \Gamma(p+q) B(p, q).\end{aligned}$$

par conséquent

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

■

1.3 Intégrales fractionnaires

Cette section sera consacré aux définitions élémentaires et notions de base relatives au calcul fractionnaire telles que : l'intégration fractionnaire de Riemann Liouville et l'intégration fractionnaire de Hadamard, la dérivation fractionnaire au sens Riemann-Liouville, Caputo, et Hadamard, qui sont les plus utilisées.

1.3.1 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

Fonctions définies sur $[a, b]$.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur $[a, b]$.

Notons par $(\mathcal{I}_{a+}^1 f)$ la primitive de f qui s'annule en a :

$$\forall t \in [a, b]; \quad (\mathcal{I}_{a+}^1 f)(t) = \int_a^t f(\tau) d\tau.$$

L'itération de $(\mathcal{I}_{a+}^1 f)$ permet d'obtenir la primitive seconde de f qui s'annule en a et dont la dérivée s'annule en a . De plus, d'après le théorème de Fubini.

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a+}^1 f)^2(t) &= (\mathcal{I}_{a+}^1 f) \circ (\mathcal{I}_{a+}^1 f) = \int_a^t \left(\int_a^u f(\tau) d\tau \right) du \\ &= \int_a^t (t - \tau) f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En notant $(\mathcal{I}_{a+}^1 f)^n$ la nième itération de $(\mathcal{I}_{a+}^1 f)$, une récurrence directe montre que

$$(\mathcal{I}_{a+}^1 f)^n(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

Si on note $g = (\mathcal{I}_{a+}^1 f)^n$, g est donc l'unique fonction vérifiant

$$\forall 0 \leq k \leq n-1, \quad g^{(k)}(a) = 0, \quad g^{(n)} = f.$$

L'égalité $g^{(n)} = f$ justifie la définition suivante:

Définition 1.3.1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'intégrale à gauche d'ordre n de f , que l'on note $(\mathcal{I}_{a+}^n f)$ est définie par :

$$(\mathcal{I}_{a+}^n f)(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^t (t - \tau)^{n-1} f(\tau) d\tau.$$

Grâce à la fonction Gamma d'Euler que nous avons définie précédemment.

C'est la propriété $\Gamma(n+1) = n!, \forall n \in \mathbb{N}$, qui permet de généraliser la définition 1.3.1 de la manière suivant:

Définition 1.3.2 L'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre $\alpha > 0$ de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b]; \quad (\mathcal{I}_{a+}^\alpha f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

De même manière on définit l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre $\alpha > 0$ est définie par :

$$\forall t \in [a, b]; \quad (\mathcal{I}_{b-}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau - t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$.

Il est naturel d'étendre la définition 1.3.2 aux axes $\mathbb{R}^+$ et $\mathbb{R}$. Notons ces opérateurs $(\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} f)$ et $(\mathcal{I}_{+}^{\alpha} f)$:

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}^+; \quad (\mathcal{I}_{0+}^{\alpha} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \\ \forall t \in \mathbb{R}; \quad (\mathcal{I}_{+}^{\alpha} f)(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Proposition 1.3.1 [7]. *Pour $\alpha > 0$, $\beta > 0$, on a*

1. $(\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} (t - a)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (t - a)^{\alpha+\beta-1}.$
2. $(\mathcal{I}_{b-}^{\alpha} (b - t)^{\beta-1})(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (b - t)^{\alpha+\beta-1}.$

Preuve.

1.

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} (t - a)^{\beta-1})(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t - \tau)^{\alpha-1} (\tau - a)^{\beta-1} d\tau, \text{ posons } \tau - a = s(t - a) \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 ((t - a) - s(t - a))^{\alpha-1} (s(t - a))^{\beta-1} (t - a) ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 s^{\beta-1} (1 - s)^{\alpha-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} (t - a)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta), \quad \left| B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \right| \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} (t - a)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

2. Même idée (le changement de variable est $b - \tau = s(b - t)$).

■

Théorème 1.3.1 [7]. *Si $f \in L^1([a, b])$, alors $\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f$ existe pour tout $\alpha > 0$ et $\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f \in L^1([a, b])$.*

Proposition 1.3.2 [7]. Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, et $f \in L^1([a, b])$. Alors

$$\mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \mathcal{I}_{a+}^{\beta} f(t) = \mathcal{I}_{a+}^{\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f(t) = \mathcal{I}_{a+}^{\alpha+\beta} f(t).$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \mathcal{I}_{a+}^{\beta} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^{\tau} (\tau-s)^{\beta-1} f(s) ds \right) d\tau, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^t \int_a^{\tau} (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-s)^{\beta-1} f(s) ds d\tau, \quad \left| \begin{array}{l} \text{changement de l'ordre} \\ \text{d'intégration} \end{array} \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) \int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-s)^{\beta-1} d\tau ds, \end{aligned}$$

Posons $u = \frac{\tau-s}{t-s}$, alors

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} \mathcal{I}_{a+}^{\beta} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} \left(\int_s^t (1-u)^{\alpha-1} u^{\beta-1} du \right) ds, \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} B(\alpha, \beta) du ds, \quad \left| B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \right| \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t f(s) (t-s)^{\alpha+\beta-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds \\ &= \mathcal{I}_{a+}^{\alpha+\beta} f(t). \end{aligned}$$

■

1.3.2 L'intégrale fractionnaire de Hadamard

Soit $[a, b]$, un intervalle fini ou infini tel que $(0 \leq a < b < +\infty)$, et $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$.

Définition 1.3.3 [7]. Soit $\alpha > 0$. L'intégrale fractionnaire de Hadamard à gauche (resp. à droite) d'ordre α de f est définie par :

$$(\mathcal{J}_{a+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau.$$

(resp.

$$(\mathcal{J}_{b-}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b \left(\log \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau.$$

Si $a = 0$ et $b = \infty$, ces définitions sont données par :

$$(\mathcal{J}_{0+}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \left(\log \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (x > 0).$$

et

$$(\mathcal{J}_{-}^{\alpha} f)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^{\infty} \left(\log \frac{\tau}{t} \right)^{\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (x > 0).$$

Proposition 1.3.3 [7]. Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $(0 < a < b < +\infty)$, on a

$$\begin{aligned} 1. \quad & \left(\mathcal{J}_{a+}^{\alpha} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta+\alpha-1}. \\ 2. \quad & \left(\mathcal{J}_{b-}^{\alpha} \left(\log \frac{b}{t} \right)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \left(\log \frac{b}{t} \right)^{\beta+\alpha-1}. \end{aligned}$$

Preuve. 1. On a

$$\left(\mathcal{J}_{a+}^{\alpha} \left(\log \frac{t}{a} \right)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau} \right)^{\alpha-1} \frac{\left(\log \frac{\tau}{a} \right)^{\beta-1}}{\tau} d\tau,$$

Posons $\left(\log \frac{\tau}{a} \right) = s \left(\log \frac{t}{a} \right)$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 \left(\log \frac{t}{a \left(\frac{t}{a} \right)^s} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{a} e^{-s \log \frac{t}{a}} \left[s \log \frac{t}{a} \right]^{\beta-1} a \log \left(\frac{t}{a} \right) e^{s \log \frac{t}{a}} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^1 s^{\beta-1} (s-1)^{\alpha-1} \left[\log \left(\frac{t}{a} \right) \right]^{\beta+\alpha-1} ds \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left[\log \left(\frac{t}{a} \right) \right]^{\beta+\alpha-1} B(\alpha, \beta), \quad \left| B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha) \Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \right|. \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)} \left[\log \left(\frac{t}{a} \right) \right]^{\beta+\alpha-1}. \end{aligned}$$

2. Même idée. ■

Proposition 1.3.4 [7]. Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $1 \leq p \leq \infty$.

Si $0 < a < b < +\infty$, et $f \in L^p(a, b)$. Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{a+}^{\alpha} \mathcal{J}_{a+}^{\beta} f &= \mathcal{J}_{a+}^{\alpha+\beta} f, \quad (c \leq 0). \\ \mathcal{J}_{b-}^{\alpha} \mathcal{J}_{b-}^{\beta} f &= \mathcal{J}_{b-}^{\alpha+\beta} f, \quad (c \geq 0). \end{aligned}$$

1.4 Dérivées fractionnaires

Il existe plusieurs définition de dérivées fractionnaires, nous présentons dans cette section les définitions des dérivées fractionnaires de Riemann-Liouville, Caputo ainsi que Hadamard qui sont les plus utilisées et nous donnons certaines de leurs propriétés.

1.4.1 Dérivées fractionnaire de Riemann-Liouville

Ces approche dites encore à partir des primitives est sont basé sur l'intégration afin de définir la dérivation non entière.

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$. En s'inspirant de la relation classique $\frac{d}{dt} = \frac{d^2}{dt^2} \circ_a \mathcal{I}_t^1$, on peut définir une dérivée fractionnaire d'ordre $0 \leq \alpha < 1$ par :

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d}{dt} \circ_a \mathcal{I}_t^{1-\alpha}.$$

Plus généralement, si $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$ on peut poser:

$$\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} = \frac{d^n}{dt^n} \circ_a \mathcal{I}_t^{n-\alpha}.$$

On obtient exactement la dérivée de Riemann-Liouville à gauche.

Définition 1.4.1 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], \mathcal{D}_{a+}^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n \circ \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

De plus on a vu que la définition 1.4.1 d'intégrale à droite était associée à $\frac{d}{dt}$. Le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 1.4.2 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville à droite d'ordre α de f est définie par:

$$\forall t \in [a, b], \mathcal{D}_{b-}^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \circ \mathcal{I}_{b-}^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^b (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Si maintenant $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, les définitions précédentes se généralisent directement et sont appelées dérivées de Liouville.

Définition 1.4.3 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à gauche d'ordre α de f est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_+^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n \circ \mathcal{I}_+^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_{-\infty}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

De plus, on a vu que la définition 1.4.3 d'intégrale à droite était associée à $\frac{-d}{dt}$. Le raisonnement précédent conduit donc à la définition suivante :

Définition 1.4.4 Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Liouville à droite d'ordre α de f est définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \mathcal{D}_-^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt} \right)^n \circ \mathcal{I}_-^{n-\alpha} f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_t^{+\infty} (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau.$$

Remarque 1.4.1 1. Pour $\alpha = 0$, et $n = 1$. On a

$$\mathcal{D}_{a+}^0 f(t) = \frac{d}{dt} (\mathcal{I}_{a+}^1 f) = f(t).$$

2. Tout ces dérivées coïncident avec les dérivées usuelles pour les ordres entiers:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \begin{cases} \mathcal{D}_{a+}^n f(t) = \mathcal{D}_+^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \\ \mathcal{D}_{b-}^n f(t) = \mathcal{D}_-^n f(t) = (-1)^n \frac{d^n}{dt^n} f(t) \end{cases}.$$

Proposition 1.4.1 [7]. Pour $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$ et $\beta - \alpha > 0$. On a

$$\begin{aligned} 1. \quad & \left(\mathcal{D}_{a+}^\alpha (t-a)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \\ 2. \quad & \left(\mathcal{D}_{b-}^\alpha (b-t)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

Preuve.

1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, d'après la définition 1.4.1, et proposition 1.3.1, on a

$$(\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n \circ \mathcal{I}_{a+}^{n-\alpha} f(t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^n \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (t-a)^{n-\alpha+\beta-1} \right),$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \right)^n (t-a)^{n-\alpha+\beta-1} &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \dots \\ &\quad (n-\alpha+\beta-1-(n-1)) (t-a)^{-\alpha+\beta-1} \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \dots (\beta-\alpha) (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \end{aligned}$$

et d'autre coté

$$\begin{aligned}
 \Gamma(n - \alpha + \beta) &= (n - \alpha + \beta - 1) \Gamma(n - \alpha + \beta - 1), & \Gamma(x + 1) &= x \Gamma(x) \\
 &= (n - \alpha + \beta - 1) (n - \alpha + \beta - 2) \Gamma(n - \alpha + \beta - 2), \\
 &= (n - \alpha + \beta - 1) (n - \alpha + \beta - 2) \dots (\beta - \alpha) \Gamma(\beta - \alpha).
 \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n - \alpha + \beta)} (n - \alpha + \beta - 1) (n - \alpha + \beta - 2) \dots (\beta - \alpha) (t - a)^{\beta - \alpha - 1} \\
 &= \frac{(n - \alpha + \beta - 1) (n - \alpha + \beta - 2) \dots (\beta - \alpha) \Gamma(\beta)}{(n - \alpha + \beta - 1) (n - \alpha + \beta - 2) \dots (\beta - \alpha) \Gamma(\beta - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha - 1} \\
 &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \alpha)} (t - a)^{\beta - \alpha - 1}.
 \end{aligned}$$

2. De même manière.

■

Remarque 1.4.2 [7]. Pour $\lambda = \beta - 1$, $a = 0$, on a

$$(\mathcal{D}_{0+}^n t^{\lambda})(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, & \text{si } \alpha - \lambda \notin \{1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{si } \alpha - \lambda \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}, \quad \lambda > -1.$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \alpha - \lambda = m \Rightarrow \lambda = \alpha - m$, $m \in \{1, 2, \dots, n\}$.

C-à-d

$$(\mathcal{D}_{0+}^n t^{\alpha-m})(t) = 0, \quad m \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Proposition 1.4.2 [7]. Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n = [\alpha] + 1$, $(1 \leq p \leq \infty)$.

On a les propriétés suivantes :

1. Si $f(t) \in L^p([a, b])$, alors

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f)(t) = f(t) \quad \text{et} \quad (\mathcal{D}_{b-}^{\alpha} \mathcal{I}_{b-}^{\alpha} f)(t) = f(t).$$

2. Si $\alpha > \beta$ et $f(t) \in L^p([a, b])$, alors

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\beta} \mathcal{I}_{a+}^{\alpha} f)(t) = (\mathcal{I}_{a+}^{\alpha-\beta} f)(t) \quad \text{et} \quad (\mathcal{D}_{b-}^{\beta} \mathcal{I}_{b-}^{\alpha} f)(t) = (\mathcal{I}_{b-}^{\alpha-\beta} f)(t).$$

3. Si $f(t) \in L^1([a, b])$, $(\mathcal{I}_{a^+}^{\alpha-\beta} f) \in AC^m([a, b])$, alors

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_{a^+}^\alpha \mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) &= f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(\mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} f)^{(n-k)}(a)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (t - a)^k. \\ (\mathcal{I}_{b^-}^\alpha \mathcal{D}_{b^-}^\alpha f)(t) &= f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{n-k} (\mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} f)^{(n-k)}(b)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (b - t)^k. \end{aligned}$$

4. Si $f(t) \in C^q([a, b])$, $q = [\alpha + \beta] + 1$, alors

$$(\mathcal{D}_{a^+}^\alpha \mathcal{D}_{a^+}^\beta f)(t) = (\mathcal{D}_{a^+}^{\alpha+\beta} f)(t) \quad \text{et} \quad (\mathcal{D}_{b^-}^\alpha \mathcal{D}_{b^-}^\beta f)(t) = (\mathcal{D}_{b^-}^{\alpha+\beta} f)(t).$$

1.4.2 Dérivées fractionnaires de Caputo

Cette définition se base sur l'intervention des compositions dans la formule de définition 1.3.1, semble aussi raisonnable pour définir une dérivée fractionnaire appelée dérivée de Caputo.

Définition 1.4.5 [7]. Soit $\alpha > 0$, $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à gauche d'ordre α de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], \quad {}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Définissons aussi son analogue à droite.

Définition 1.4.6 [7]. Soit $\alpha > 0$, et $n = [\alpha] + 1$. La dérivée fractionnaire de Caputo à droite d'ordre α de f est définie par :

$$\forall t \in [a, b], \quad {}^C\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) = \mathcal{I}_{b^-}^{n-\alpha} \circ \left(-\frac{d}{dt} \right)^n f(t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

Remarque 1.4.3 [7]. Par contre, de telles définitions ne se recollent pas correctement aux dérivées classiques :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*; \quad \begin{cases} {}^C\mathcal{D}_{a^+}^n f(t) &= f^{(n)}(t) - f^{(n)}(a) \\ {}^C\mathcal{D}_{b^-}^n f(t) &= (-1)^n (f^{(n)}(t) - f^{(n)}(b)) \end{cases}.$$

Le résultat suivant montre qu'elles approchent les dérivées classiques par limite inférieure.

Lemme 1.4.1 [7]. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{N}$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f \in AC^n([a, b])$, alors

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f(t) &= f^{(n)}(t). \\ \lim_{\alpha \rightarrow n^-} {}^C\mathcal{D}_{b^-}^\alpha f(t) &= (-1)^n f^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Proposition 1.4.3 [7]. Pour $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, on a

$$\begin{aligned} 1. \quad & \left({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha (t-a)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}, \quad \beta > n. \\ 2. \quad & \left({}^C\mathcal{D}_{b^-}^\alpha (b-t)^{\beta-1} \right) (t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (b-t)^{\beta-\alpha-1}, \quad \beta > n. \end{aligned}$$

Preuve.

1. Posons $f(t) = (t-a)^{\beta-1}$, d'après la définition 1.4.5, on a :

$$({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) = \mathcal{I}_{a^+}^{n-\alpha} \circ \left(\frac{d}{dt} \right)^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\tau) d\tau.$$

et

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt} \right)^n (t-a)^{\beta-1} &= (\beta-1)(\beta-2) \dots (\beta-1-(n-1)) (t-a)^{\beta-1-n} \\ &= (\beta-1)(\beta-2) \dots (\beta-n) (t-a)^{\beta-n-1} \end{aligned}$$

d'où

$$({}^C\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) = \frac{(\beta-1)(\beta-2) \dots (\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} (\tau-a)^{\beta-1-n} d\tau,$$

posons $\tau - a = s(t-a)$

$$\begin{aligned} &= \frac{(\beta-1)(\beta-2) \dots (\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \int_0^1 (1-s)^{n-\alpha-1} s^{\beta-n-1} ds \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2) \dots (\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} B(n-\alpha, \beta-n) \\ &\quad \left| B(n-\alpha, \beta-n) = \frac{\Gamma(n-\alpha)\Gamma(\beta-n)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \right| \\ &= \frac{(\beta-1)(\beta-2) \dots (\beta-n) \Gamma(n-\alpha) \Gamma(\beta-n)}{\Gamma(n-\alpha) \Gamma(\beta-n)} (t-a)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} (t-a)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

2. De même manière.

■

Remarque 1.4.4 [7]. Pour $\lambda = \beta - 1$, $a = 0$, on a

$$\left({}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha t^\lambda\right)(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} t^{\lambda-\alpha}, & \text{si } \lambda \notin \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \\ 0, & \text{si } \lambda \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\} \end{cases}, \quad \lambda > -1.$$

C-à-d

$$\left({}^C\mathcal{D}_{0+}^\alpha t^m\right)(t) = 0, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

Théorème 1.4.1 [7]. Soient $\alpha \geq 0$ et $n = [\alpha] + 1$. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, si f possède $(n-1)$ dérivées en a et $(\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)$ existe. Alors

$$\left({}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f\right)(t) = \mathcal{D}_{a+}^\alpha \left[f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right].$$

presque pour tout $t \in [a, b]$.

Corollaire 1.4.1 [7]. Soient $\alpha \geq 0$, $n = [\alpha] + 1$ et $(\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(t)$, $({}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(t)$ sont existents, on suppose que $f^{(k)}(a) = 0$ pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. Alors

$$\left({}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f\right)(t) = (\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(t).$$

Proposition 1.4.4 [7]. Soit $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $n = [\alpha] + 1$.

On a les propriétés suivant:

1. Si $f(t) \in C^q([a, b])$, $q = [\alpha + \beta] + 1$, alors

$$\left({}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha {}^C\mathcal{D}_{a+}^\beta f\right)(t) = \left({}^C\mathcal{D}_{a+}^{\alpha+\beta} f\right)(t), \quad \text{et} \quad \left({}^C\mathcal{D}_{b-}^\alpha {}^C\mathcal{D}_{b-}^\beta f\right)(t) = \left({}^C\mathcal{D}_{b-}^{\alpha+\beta} f\right)(t),$$

2. Si $f(t) \in C^m([a, b])$, ou $f(t) \in AC^m([a, b])$, alors

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{I}_{a+}^\alpha {}^C\mathcal{D}_{a+}^\alpha f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k. \\ \left(\mathcal{I}_{b-}^\alpha {}^C\mathcal{D}_{b-}^\alpha f\right)(t) &= f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k} f^{(k)}(b)}{k!} (b-t)^k. \end{aligned}$$

1.4.3 Dérivées fractionnaires de Hadamard

Soit $[a, b]$, un intervalle de $\mathbb{R}$, et on a la fonction $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\left(\delta = t \frac{d}{dt}\right)$ le δ -dérivé. et

$$AC_\delta^n[a, b] = \{g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \delta^{n-1}g(t) \in AC[a, b], \delta = t \frac{d}{dt}\}.$$

Définition 1.4.7 [7]. Soit $\alpha > 0$ et $n = [\alpha] + 1$.

Les dérivées fractionnaires de Hadamard à gauche et à droite d'ordre α de f sont définies par :

$$\begin{aligned} ({}^H\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(t) &= \delta^n ({}^H\mathcal{J}_{a+}^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \left(t \frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t \left(\log \frac{t}{\tau}\right)^{n-\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (t > a). \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

et

$$\begin{aligned} ({}^H\mathcal{D}_{b-}^\alpha f)(t) &= (-\delta)^n ({}^H\mathcal{J}_{b-}^{n-\alpha} f)(t) \\ &= \left(-t \frac{d}{dt}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b \left(\log \frac{\tau}{t}\right)^{n-\alpha-1} \frac{f(\tau)}{\tau} d\tau, \quad (t < b). \end{aligned}$$

respectivement.

Proposition 1.4.5 [7]. Si $\alpha > 0$, $\beta > 0$, alors

$$\begin{aligned} 1. \quad & \left({}^H\mathcal{D}_{a+}^\alpha \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}. \\ 2. \quad & \left({}^H\mathcal{D}_{b-}^\alpha \left(\log \frac{b}{t}\right)^{\beta-1}\right)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left(\log \frac{b}{t}\right)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

En particulier, si $\beta = 1$, on a

$$\begin{aligned} 1. \quad & ({}^H\mathcal{D}_{a+}^\alpha 1)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{-\alpha}. \\ 2. \quad & ({}^H\mathcal{D}_{b-}^\alpha 1)(t) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\log \frac{b}{t}\right)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Preuve.

1. Posons $f(t) = \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-1}$, d'après la définition 1.4.7, et proposition 1.3.3, on a

$$({}^H\mathcal{D}_{a+}^\alpha f)(t) = \left(t \frac{d}{dt}\right)^n \circ \mathcal{J}_{a+}^{n-\alpha} f(t) = \left(t \frac{d}{dt}\right)^n \left(\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1} \right)$$

et

$$\begin{aligned} \left(t \frac{d}{dt}\right)^n \left(\log \frac{t}{a}\right)^{n-\alpha+\beta-1} &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \dots (n-\alpha+\beta-1-(n-1)) \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1} \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \dots (\beta-\alpha) \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1} \end{aligned}$$

et d'autre coté

$$\begin{aligned} \Gamma(n-\alpha+\beta) &= (n-\alpha+\beta-1) \Gamma(n-\alpha+\beta-1), \quad \Gamma(x+1) = x \Gamma(x) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \Gamma(n-\alpha+\beta-2) \\ &= (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \dots (\beta-\alpha) \Gamma(\beta-\alpha). \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha} f)(t) &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)} (n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \dots (\beta-\alpha) \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \dots (\beta-\alpha) \Gamma(\beta)}{(n-\alpha+\beta-1)(n-\alpha+\beta-2) \dots (\beta-\alpha) \Gamma(\beta-\alpha)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\alpha)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\beta-\alpha-1}. \end{aligned}$$

2. De même manière. ■

Remarque 1.4.5 Pour $\lambda = \beta - 1$, $a = 1$ on a

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}_{1+}^{\alpha} (\log t)^{\lambda}\right)(t) &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)} (n-\alpha+\lambda)(n-\alpha+\lambda-1) \dots (\lambda+1-\alpha) (\log t)^{\lambda-\alpha} \\ &= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(n-\alpha+\lambda+1)} (n-(\alpha-\lambda))(n-1-(\alpha-\lambda)) \dots (1-(\alpha-\lambda)) (\log t)^{\lambda-\alpha} \\ &= \begin{cases} \frac{\Gamma(\lambda+1)}{\Gamma(\lambda-\alpha+1)} (\log t)^{\lambda-\alpha}, & \text{si } \alpha-\lambda \notin \{1, 2, \dots, n\} \\ 0, & \text{si } \alpha-\lambda \in \{1, 2, \dots, n\} \end{cases}, \quad \lambda > -1. \end{aligned}$$

Si $\alpha - \lambda \in \{1, 2, \dots, n\} \Rightarrow \alpha - \lambda = m \Rightarrow \lambda = \alpha - m$, $m \in \{1, 2, \dots, n\}$ C-à-d

$$(\mathcal{D}_{1+}^{\alpha} (\log t)^{\alpha-m}) = 0, \quad m \in \{1, 2, \dots, n\}$$

Proposition 1.4.6 [7]. Soit $\alpha > 0$, et $\beta > 0$.

Si $1 \leq p \leq \infty$, alors, pour $f \in L^p(a, b)$

$${}^H\mathcal{D}_{a+}^{\beta} \mathcal{J}_{a+}^{\alpha} f = \mathcal{J}_{a+}^{\alpha-\beta} f \quad \text{et} \quad {}^H\mathcal{D}_{b-}^{\beta} \mathcal{J}_{b-}^{\alpha} f = \mathcal{J}_{b-}^{\alpha-\beta} f.$$

En particulier, si $\beta = m \in \mathbb{N}$, alors

$${}^H\mathcal{D}_{a+}^m \mathcal{J}_{a+}^{\alpha} f = \mathcal{J}_{a+}^{\alpha-m} f \quad \text{et} \quad {}^H\mathcal{D}_{b-}^m \mathcal{J}_{b-}^{\alpha} f = \mathcal{J}_{b-}^{\alpha-m} f.$$

Proposition 1.4.7 [7]. Soit $\alpha > 0$, et $1 \leq p \leq \infty$, alors, pour $f \in L^p(a, b)$.

$${}^H\mathcal{D}_{a^+}^\alpha \mathcal{J}_{a^+}^\alpha f = f \quad (c \leq 0).$$

$${}^H\mathcal{D}_{b^-}^\alpha \mathcal{J}_{b^-}^\alpha f = f \quad (c \geq 0).$$

Théorème 1.4.2 [7]. Soit $\alpha > 0$, et $f \in L(a, b)$ et $(\mathcal{J}_{a^+}^{n-\alpha} f)(t) \in AC_\delta^n[a, b]$. Alors

$$(\mathcal{J}_{a^+}^\alpha {}^H\mathcal{D}_{a^+}^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(\delta^{n-k}(\mathcal{J}_{a^+}^{n-\alpha} f))(a)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} \left(\log \frac{t}{a}\right)^{\alpha-k}.$$

En particulier, si $\alpha = n \in \mathbb{N}$ et $f \in AC_\delta^n[a, b]$, alors

$$(\mathcal{J}_{a^+}^n {}^H\mathcal{D}_{a^+}^n f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\delta^k f)(a)}{k!} \left(\log \frac{t}{a}\right)^k.$$

Chapitre 2

Equations différentielles fractionnaires de type Hadamard

Ce chapitre constitue une partie préliminaire dans la quelle on rappelle des notions et des résultats fondamentaux de la théorie de l'analyse fonctionnelle (principe de contraction de Banach, équicontinuité, théorème de Schauder, théorème d'Arzela-Ascoli,...) qui représentent un outils indispensable dans notre étude.

On abordera ensuite, la question d'existence et d'unicité de la solution pour le problème aux limites d'équation différentielle d'ordre fractionnaire de type Hadamard suivant :

$$\begin{cases} {}^H\mathcal{D}^\alpha u(t) = f(t, u), & 1 < t < e, \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ u(1) = 0, \quad u(e) = \mathcal{J}_{1+}^\beta u(e) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\beta-1} \frac{u(s)}{s} ds, & \beta > 0 \end{cases}, \quad (2.0.1)$$

Où ${}^H\mathcal{D}$ est la dérivée d'ordre fractionnaire de type Hadamard, $f : [1, e] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue.

2.1 Quelques théorèmes de point fixe

Dans cette section on a destiné aux différents outils et résultats de la théorie de l'analyse fonctionnelles utilisés par la suite : principe de contraction de Banach, équicontinuité, théorème de Schauder, théorème d'Arzela-Ascoli,...

Définition 2.1.1 Soit (E, d) un espace métrique complet et $F : E \rightarrow E$ une application continue.

i) On dit que $x \in E$ est un point fixe de F si $f(u) = u$.

ii) On dit que F est contractante si elle est lipschitzienne de rapport $0 < L < 1$, c'est-à-dire s'il existe $0 < L < 1$, tel que

$$\forall u, v \in E, d(F(u), F(v)) \leq Ld(u, v), \quad 0 < L < 1.$$

Définition 2.1.2 (Complètement continue)

Soient X et Y deux espaces de Banach et $F : X \rightarrow Y$ une application définie de X à valeurs dans F . On dit que F est complètement continue si elle est continue et transforme tout borné de X en un ensemble relativement compact dans Y . F est dite compacte si $F(X)$ est relativement compacte dans Y .

Théorème 2.1.1 (Banach [5])

Soient X un espace de Banach, et un opérateur contractant $F : X \rightarrow X$. Alors F admet un point fixe unique.

i.e $\exists! u \in X$ tel que $Fu = u$.

Le deuxième théorème de point fixe qu'on va énoncer est celui de Schauder.

Théorème 2.1.2 (Schauder [5])

Soit $(E; d)$ un espace métrique complet, et X une partie convexe et fermée de E , et soit $F : X \rightarrow X$ une application telle que l'ensemble $\{Fu : u \in X\}$ est relativement compacte dans E . Alors F possède au moins un point fixe.

Théorème 2.1.3 (Leray-Schauder Alternative [5]) Soit X un espace de Banach, C un sous-ensemble convexe et fermé dans X , U est un sous-ensemble ouvert de C et $0 \in U$. Supposons que $F : \bar{U} \rightarrow C$ un opérateur continu et compact ($F(\bar{U})$ est relativement compact de C). Alors

(i) F admet un point fixe de $\bar{U}$. ou

(ii) Il existe un $u \in \partial U$ et $\lambda \in (0, 1)$ avec $u = \lambda F(u)$

Théorème 2.1.4 (Schaefer [5])

Soient X un espace de Banach et $F : X \rightarrow X$ un opérateur complètement continu. Si l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{u \in X : \lambda Fu = u, \lambda \in]0, 1[\}$$

est borné, alors F possède au moins un point fixe.

Théorème 2.1.5 (Krasnoselskii [5])

Soit M un sous ensemble fermé et borné, convexe et non vide d'un espace de Banach X .

Soient A, B deux opérateurs tels que

(a) $Ax + By \in M, \forall x, y \in M$

(b) A est compact et continu

(c) B est un opérateur contractante.

Alors il existe $z \in M$ tel que $z = Az + Bz$.

Enfin, nous rappelons le théorème d'Arzela-Ascoli

Théorème 2.1.6 (Ascoli-Arzelà [5])

Soit A un sous ensemble de $C(J; E)$; A est relativement compact dans $C(J; E)$ si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

i) L'ensemble A est borné. i.e il existe une constante $K > 0$ tel que :

$$\|f\| \leq K \text{ pour tout } x \in J \text{ et } f \in A.$$

ii) L'ensemble A est équicontinue. i.e pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|t_1 - t_2| < \delta \implies \|f(t_1) - f(t_2)\| \leq \varepsilon \text{ pour tous } t_1, t_2 \in J \text{ et } f \in A.$$

iii) Pour tout $x \in J$ l'ensemble $\{f(x), f \in A\} \subset E$ est relativement compact.

2.2 Lemmes fondamentaux

Lemme 2.2.1 Soit $\alpha > 0$. Si nous supposons que $u \in C(1, e) \cap L(1, e)$, alors l'équation différentielle fractionnaire de type Hadamard:

$${}^H\mathcal{D}_{1+}^\alpha u(t) = 0, \quad 1 < t < e, \quad (2.2.1)$$

admet une solution générale unique

$$u(t) = C_1 (\log t)^{\alpha-1} + C_2 (\log t)^{\alpha-2} + \dots + C_n (\log t)^{\alpha-n}.$$

Preuve. Soit $\alpha > 0$. D'après la Remarque 1.4.5, on a:

$${}^H\mathcal{D}_{1+}^\alpha (\log t)^{\alpha-m} = 0, \quad \text{avec } m = 1, 2, \dots, n.$$

Alors l'équation différentielle fractionnaire, admet une solution particulière, comme

$$u(t) = C_m (\log t)^{\alpha-m}, \quad \text{avec } m = 1, 2, \dots, n. \quad (2.2.2)$$

où $C_m \in \mathbb{R}$.

Donc la solution générale de (2.2.1), donné comme une somme des solutions particulières (2.2.2), C.-à-d.

$$u(t) = C_1 (\log t)^{\alpha-1} + C_2 (\log t)^{\alpha-2} + \dots + C_m (\log t)^{\alpha-m},$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \dots, n$. ■

Lemme 2.2.2 Soit $\alpha > 0$, supposons que

$$u \in L(1, e), \quad \text{et} \quad (\mathcal{J}_{1+}^{n-\alpha} f)(t) \in AC_\delta^n[1, e].$$

Alors:

$$\mathcal{J}_{1+}^\alpha {}^H\mathcal{D}_{1+}^\alpha u(t) = u(t) - C_1 (\log t)^{\alpha-1} - C_2 (\log t)^{\alpha-2} - \dots - C_m (\log t)^{\alpha-m}. \quad (2.2.3)$$

où $C_m \in \mathbb{R}$, avec $m = 1, 2, \dots, n$.

Preuve. Soit $\alpha > 0$. Pour tout $u \in L(1, e)$, et $(\mathcal{J}_{1+}^{n-\alpha} f)(t) \in AC_\delta^n[1, e]$ (théorème 1.4.2) on a

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}_{1+}^\alpha {}^H\mathcal{D}_{1+}^\alpha u)(t) &= f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{(\delta^{n-k} (\mathcal{J}_{1+}^{n-\alpha} u))(1)}{\Gamma(\alpha - k + 1)} (\log t)^{\alpha-k} \\ &= u(t) - \left[\frac{(\delta^{n-1} (\mathcal{J}_{1+}^{n-\alpha} u))(1)}{\Gamma(\alpha)} (\log t)^{\alpha-1} + \frac{(\delta^{n-2} (\mathcal{J}_{1+}^{n-\alpha} u))(1)}{\Gamma(\alpha-1)} (\log t)^{\alpha-2} + \right. \\ &\quad \left. \dots + \frac{(\mathcal{J}_{1+}^{n-\alpha} u)(1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} (\log t)^{\alpha-n} \right] \end{aligned}$$

On pose $C_m = \frac{(\delta^{n-m} (\mathcal{J}_{1+}^{n-\alpha} u))(1)}{\Gamma(\alpha-m+1)} \in \mathbb{R}$, pour chaque $m = 1, 2, \dots, n$, on trouve l'égalité 2.2.3.

■

Lemme 2.2.3 [2]. Soit $1 < \alpha \leq 2$, $\beta > 0$, et $y \in C([1, e])$.

Alors l'unique solution de problème aux limites :

$$\begin{cases} {}^H\mathcal{D}^\alpha u(t) = y(t), & 1 < t < e \\ u(1) = 0, & u(e) = \mathcal{J}_{1+}^\beta u(e) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\beta-1} \frac{y(s)}{s} ds. \end{cases} \quad (2.2.4)$$

est donné par :

$$u(t) = \mathcal{J}^\alpha y(t) + \frac{\Gamma(\beta + \alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\beta + \alpha) - \Gamma(\alpha)} [\mathcal{J}_{1+}^{\beta+\alpha} y(e) - \mathcal{J}_{1+}^\alpha y(e)] \quad (2.2.5)$$

Preuve. Supposons que u satisfait le problème 2.2.4, alors on a

$${}^H\mathcal{D}^\alpha u(t) = y(t)$$

En appliquant l'opérateur d'intégration fractionnaire $\mathcal{J}_{1+}^\alpha$ aux deux membres de l'équation ci-dessus nous obtenons

$$\mathcal{J}_{1+}^\alpha {}^H\mathcal{D}_{1+}^\alpha u(t) = \mathcal{J}_{1+}^\alpha y(t),$$

D'après le Lemme 2.2.2, pour $1 < \alpha \leq 2$ ($n = [\alpha] + 1 = 2$), on a :

$$\mathcal{J}_{1+}^\alpha {}^H\mathcal{D}_{1+}^\alpha u(t) = u(t) - C_1 (\log t)^{\alpha-1} - C_2 (\log t)^{\alpha-2}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R},$$

donc

$$u(t) = \mathcal{J}_{1+}^\alpha y(t) + C_1 (\log t)^{\alpha-1} + C_2 (\log t)^{\alpha-2}. \quad (2.2.6)$$

Les conditions aux limites implique que : $u(1) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$, et

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{J}_{1+}^\alpha y(e) + C_1 = \mathcal{J}_{1+}^\beta [\mathcal{J}_{1+}^\alpha y(t) + C_1 (\log t)^{\alpha-1}] (e) \\ u(e) = \mathcal{J}_{1+}^\beta u(e) \Rightarrow \mathcal{J}_{1+}^\alpha y(e) + C_1 = \mathcal{J}_{1+}^{\beta+\alpha} y(e) + C_1 \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\beta+\alpha)} \\ C_1 = \frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{(\Gamma(\beta+\alpha) - \Gamma(\alpha))} [\mathcal{J}_{1+}^{\beta+\alpha} y(e) - \mathcal{J}_{1+}^\alpha y(e)] \end{array} \right.,$$

substituant les valeurs de C_1, C_2 dans (2.2.6) nous obtenons l'équation (2.2.5),

$$\begin{aligned} u(t) &= I^\alpha y(t) + \frac{\Gamma(\beta + \alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\beta + \alpha) - \Gamma(\alpha)} [\mathcal{J}_{1+}^{\beta+\alpha} y(e) - \mathcal{J}_{1+}^\alpha y(e)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{y(s)}{s} ds \\ &\quad + \frac{\Gamma(\beta + \alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta + \alpha) - \Gamma(\alpha))} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta + \alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\beta+\alpha-1} \frac{y(s)}{s} ds \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha-1} \frac{y(s)}{s} ds \right]. \end{aligned}$$

La preuve est complet. ■

2.3 Résultats d'existence et d'unicité

Dans cette section, on donne les conditions de l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.0.1) dans l'espace $C([1, e], \mathbb{R})$, en utilisant le théorème de contraction de Banach.

On définit l'opérateur $F : C([1; e], \mathbb{R}) \longrightarrow C([1; e], \mathbb{R})$ par :

$$\begin{aligned} Fu(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s, u(s))}{s} ds \\ & + \frac{\Gamma(\beta + \alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta + \alpha) - \Gamma(\alpha))} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta + \alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1} \frac{f(s, u(s))}{s} ds \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s, u(s))}{s} ds \right], \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

et

$$\omega = \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(\beta + \alpha)}{(\Gamma(\beta + \alpha) - \Gamma(\alpha))} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right]. \quad (2.3.2)$$

Théorème 2.3.1 [2]. Soit $f : [1; e] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant :

Il existe une constante $L_1 > 0$ telle que

$$(H1) \quad |f(t, u) - f(t, v)| \leq L_1 |u - v|, \quad \forall t \in [1; e] \text{ et } \forall u, v \in \mathbb{R}$$

et

$$L_1 \omega < 1 \quad (2.3.3)$$

Alors le problème (2.0.1) admet une solution unique dans $[1; e]$.

Preuve. D'après le lemme 2.2.1, on transforme le problème (2.0.1) en un problème au point fixe $u = Fu$ et Fu défini par (2.3.1),

$$\begin{aligned} Fu(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s, u(s))}{s} ds \\ & + \frac{\Gamma(\beta + \alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta + \alpha) - \Gamma(\alpha))} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta + \alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1} \frac{f(s, u(s))}{s} ds \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s, u(s))}{s} ds \right]. \end{aligned}$$

Il est clair, que les points fixes de l'opérateur F sont les solutions du problème (2.0.1), F est bien défini. Pour montrer que F admet un point fixe, il suffit de montrer que F est une

contraction, nous utilisons le principe de contraction de Banach.

fixier $\max_{t \in [1;e]} |f(t, 0)| = M < \infty$,

$$B_r = \{u \in C([1; e], \mathbb{R}) : \|u\| \leq r\}$$

et choisir $r \geq \frac{M\omega}{1-L_1}$, nous montrons que $F(B_r) \subset B_r$, pour $u \in B_r$, on a

$$\begin{aligned} \|Fu\| &\leq \max_{t \in [1;e]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{|f(s, u(s))|}{s} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\beta+\alpha-1} \frac{|f(s, u(s))|}{s} ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha-1} \frac{|f(s, u(s))|}{s} ds \right] \right\} \\ &\leq \max_{t \in [1;e]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{(|f(s, u(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)|)}{s} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\beta+\alpha-1} \frac{(|f(s, u(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)|)}{s} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\beta+\alpha-1} \frac{(|f(s, u(s)) - f(s, 0)| + |f(s, 0)|)}{s} ds \right] \right\} \\ &\leq (L_1 r + M) \max_{t \in [1;e]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\beta+\alpha-1} \frac{1}{s} ds + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right] \right\} \\ &\leq (L_1 r + M) \max_{t \in [1;e]} \left\{ \frac{(\log t)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \right\} \\ &\leq (L_1 r + M) \omega \\ &\leq r, \end{aligned}$$

ce qui prouve que $F(B_r) \subset B_r$.

Maintenant soit $u, v \in C([1; e], \mathbb{R})$, alors, pour tout $t \in [1; e]$ on a

$$\begin{aligned} |(Fu)(t) - (Fv)(t)| &\leq \max_{t \in [1;e]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{(|f(s, u(s)) - f(s, v(s))|)}{s} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\beta+\alpha-1} \frac{(|f(s, u(s)) - f(s, v(s))|)}{s} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\beta+\alpha-1} \frac{(|f(s, u(s)) - f(s, v(s))|)}{s} ds \right] \right\} \\ &\leq L_1 \|u - v\| \max_{t \in [1;e]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t (\log \frac{t}{s})^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\beta+\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right] \right\} \\ &\leq L_1 \omega \|u - v\| \end{aligned}$$

Donc

$$\|Fu - Fv\| \leq L_1 \omega \|u - v\|.$$

En vertu de (2.3.3), on peut déduire que F est une contraction, et d'après le théorème de Banach 2.1.1, F admet un seul point fixe qui est une solution du problème (2.0.1). ■

Notre deuxième résultat pour le problème (2.0.1) est basé sur le théorème du point fixe de Krasnoselskii 2.1.5.

Théorème 2.3.2 [2]. *Soit $f : [1; e] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue satisfaisant (H1). En outre, nous vérifions que*

$$(H2) \quad |f(t, x)| \leq \mu(t), \forall (t; u) \in [1; e] \times \mathbb{R}, \text{ et } \mu \in C([1; e] \times \mathbb{R}^+).$$

Si

$$\frac{\Gamma(\beta + \alpha)}{(\Gamma(\beta + \alpha) - \Gamma(\alpha))} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) < 1. \quad (2.3.4)$$

Alors le problème (2.0.1) admet au moins une solution dans $[1; e]$

Preuve. On définit $\sup_{t \in [1; e]} |\mu(t)| = \|\mu\|$, et choisissons une constante $\bar{r}$ telle que

$$\bar{r} \geq \|\mu\| \omega,$$

où ω est donné par (2.3.2).

Soient $B_{\bar{r}} = \{u \in C([1; e]) : \|u\| \leq \bar{r}\}$, On définit les opérateurs P , Q par suite

$$(Pu)(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s, u(s))}{s} ds.$$

$$(Qu)(t) = \frac{\Gamma(\beta + \alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta + \alpha) - \Gamma(\alpha))} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta + \alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1} \frac{f(s, u(s))}{s} ds \right. \\ \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s, u(s))}{s} ds \right].$$

Pour $u, v \in B_{\bar{r}}$, nous avons

$$\begin{aligned} \|Px - Qy\| &\leq \|\mu\| \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right. \\ &\quad + \frac{\Gamma(\beta + \alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta + \alpha) - \Gamma(\alpha))} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta + \alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right] \right\} \\ &\leq \|\mu\| \omega \\ &\leq \bar{r} \end{aligned}$$

Aussi, $Pu + Qv \in B_{\bar{r}}$, le résultat de l'hypothèse (H1) avec (2.3.4) Q est une de contraction. La continuité de f implique que l'opérateur P est continu. En outre, P est uniformément borné sur $B_{\bar{r}}$,

$$\|Pu\| \leq \frac{\|\mu\|}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Maintenant, nous prouvons la compacité de l'opérateur Q .

On définit $\sup_{t \in [1;e] \times B_{\bar{r}}} |f(t, u)| = \bar{f} < \infty$, $\tau_1, \tau_2 \in [1; e]$, avec $\tau_1 < \tau_2$ et par conséquent on a

$$\begin{aligned} |P(u)(\tau_2) - P(u)(\tau_1)| &\leq \frac{\bar{f}}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_1^{\tau_1} (\log \frac{\tau_1}{s})^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds - \int_1^{\tau_2} (\log \frac{\tau_2}{s})^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right| \\ &\leq \frac{\bar{f}}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_1^{\tau_1} [(\log \frac{\tau_1}{s})^{\alpha-1} - (\log \frac{\tau_2}{s})^{\alpha-1}] \frac{1}{s} ds \right| + \frac{\bar{f}}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\log \frac{\tau_2}{s})^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right| \\ &\leq \frac{\bar{f}}{\Gamma(\alpha+1)} [|(\log \tau_1)^\alpha + (\log \tau_2 - \log \tau_1)^\alpha - (\log \tau_2)^\alpha| + |(\log \tau_2 - \log \tau_1)^\alpha|]. \end{aligned}$$

quand $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà 2.1.6, Q est relativement compact pour tout borné de $B_{\bar{r}}$.

Comme une conséquence du théorème de point fixe de Krasnoselskii 2.1.5. On déduit que $Pu + Qv$ admet au moins un point fixe qui est une solution du problème (2.0.1). ■

Maintenant on va donner un résultat d'existence basé sur le théorème de point fixe de Leray–Schauder Alternative (2.1.3).

Théorème 2.3.3 [2]. Soit $f : [1; e] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

(H3) Il existe une fonction continue non décroissante $\psi : [0; \infty) \longrightarrow [0; \infty)$, et une fonction $P \in C([1; e], \mathbb{R}^+)$ telle que

$$|f(t, u)| \leq P(t)\psi(|u|), \text{ pour tout } (t, u) \in [1; e] \times \mathbb{R}.$$

(H4) Il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\frac{M}{\psi(M) \|P\| \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{(\Gamma(\beta+\alpha)-\Gamma(\alpha))} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \right\}} > 1.$$

Alors le problème aux limites (2.0.1) admet au moins une solution dans $[1; e]$.

Preuve. Soit

$$B_r = \{u \in C([1; e], \mathbb{R}) : \|u\| \leq r\}.$$

Il est clair que le sous-ensemble B_r est fermé et convexe. Nous allons montrer que F définie par (2.3.1) satisfait les l'hypothèses du théorème de point fixe de Leray–Schauder Alternative 2.1.3.

La démonstration se fait en plusieurs étapes.

Etape 1. F est continu. Soit $\{x_n\}$ une suite telle que $x_n \rightarrow x$ dans $C([1; e]; \mathbb{R})$, Alors pour tout $t \in [1; e]$

$$\begin{aligned} |(Fx_n)(t) - (Fx)(t)| &\leq \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))|}{s} ds \right| \\ &\quad + \left| \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha) - \Gamma(\alpha))} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1} \frac{|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))|}{s} ds \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))|}{s} ds \right] \right| \\ &\leq \omega \|f(s, x_n(s)) - f(s, x(s))\| \end{aligned}$$

Puisque f est continue alors $\|F(x_n)(t) - F(x)(t)\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, d'où la continuité de F .

Etape 2. F transforme B_r en un ensemble borné de $C([1; e], \mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} |Fu(t)| &\leq \max_{t \in [1; e]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s, u(s))|}{s} ds \right. \\ &\quad + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha) - \Gamma(\alpha))} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1} \frac{|f(s, u(s))|}{s} ds \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s, u(s))|}{s} ds \right] \right\} \\ &\leq \max_{t \in [1; e]} \left\{ \frac{\psi(\|u\|) \|P\|}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right. \\ &\quad + \frac{\psi(\|u\|) \Gamma(\beta+\alpha)(\log t)^{\alpha-1}}{(\Gamma(\beta+\alpha) - \Gamma(\alpha))} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta+\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right] \right\}, \end{aligned}$$

par coséquent

$$\|Fu\| \leq \psi(u) \|P\| \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{(\Gamma(\beta+\alpha) - \Gamma(\alpha))} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right) \right\}.$$

Etape 3. F transforme B_r en un ensemble équicontinue de $C([1; e], \mathbb{R})$.

Soit $f \in C([1; e], \mathbb{R})$, $\tau_1, \tau_2 \in [1; e]$ avec $\tau_1 < \tau_2$ et $u \in B_r$. Alors on a

$$\begin{aligned} |F(u)(\tau_2) - F(u)(\tau_1)| \leq & \frac{\psi(u) \|P\|}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_1^{\tau_1} (\log \frac{\tau_1}{s})^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds - \int_1^{\tau_2} (\log \frac{\tau_2}{s})^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right| \\ & + \frac{\psi(u) \|P\| \Gamma(\beta + \alpha) |(\log \tau_2)^{\alpha-1} - (\log \tau_1)^{\alpha-1}|}{(\Gamma(\beta + \alpha) - \Gamma(\alpha))} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta + \alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\beta+\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right. \\ & \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right], \end{aligned}$$

quand $\tau_1 \rightarrow \tau_2$ Le membre droit de l'inégalité ci-dessus tend vers zéro. D'après le théorème d'Ascoli-Arzelà 2.1.6, F est relativement compact pour tout borné de B_r . Alors F est complètement continu.

Soit u une solution de problème (2.0.1). Alors pour $t \in [1; e]$, et d'après une calculs similaires à la première étape nous avons

$$\|u\| \leq \psi(\|u\|) \|P\| \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(\beta + \alpha)}{(\Gamma(\beta + \alpha) - \Gamma(\alpha))} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \right\}$$

où

$$\frac{\|u\|}{\psi(\|u\|) \|P\| \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(\beta + \alpha)}{(\Gamma(\beta + \alpha) - \Gamma(\alpha))} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \right\}} \leq 1$$

En vue de (H4), il existe M telle que $\|u\| \neq M$. On définir

$$U = \{u \in C([1; e], \mathbb{R}) : \|u\| < M\}.$$

On notera que l'opérateur $F : \bar{U} \rightarrow C([1; e], \mathbb{R})$, est continu et complètement continu. Du choix de U , il n'y a pas $u \in \partial U$ tel que $u = \lambda F u$, $\lambda \in (0; 1)$. Par conséquent, par l'alternative non-linéaire de type Leray-Schauder (théorème 2.1.3), nous déduire que F a un point fixe $u \in \bar{U}$ qui est une solution du problème (2.0.1). ■

2.4 Exemples

Exemple 2.4.1 *Considérant le problème aux limites suivant*

$$\begin{cases} {}^H\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}u(t) = \frac{L}{2}(\sin u + \frac{|u|^3}{1+|u|^3}) + \frac{\sqrt{t+1}}{e}, & 1 < t < e \\ u(1) = 0, & u(e) = \mathcal{J}^{\frac{1}{2}}u(e). \end{cases}, \quad (2.4.1)$$

Ici $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, et

$$f(t, u) = \frac{L}{2} \left(\sin u + \frac{|u|^3}{1 + |u|^3} \right) + \frac{\sqrt{t} + 1}{e},$$

on définit

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(\beta + \alpha)}{(\Gamma(\beta + \alpha) - \Gamma(\alpha))} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \\ &= \frac{16 - \sqrt{\pi}}{3\sqrt{\pi}(2 - \sqrt{\pi})}. \end{aligned}$$

Alors on a

$$|f(t, u) - f(t, v)| \leq \frac{L}{2} \left| \sin u + \frac{|u|^3}{1 + |u|^3} - \sin v + \frac{|v|^3}{1 + |v|^3} \right| \leq L |u - v|.$$

avec

$$L\omega = \frac{3\sqrt{\pi}(2 - \sqrt{\pi})}{16 - \sqrt{\pi}} < 1,$$

la condition (2.3.3) est satisfaite, Par conséquent d'après le théorème 2.3.1, le problème (2.4.1) a une solution unique dans $[1; e]$.

Exemple 2.4.2 Considerant le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} {}^H\mathcal{D}^{\frac{3}{2}}u(t) = \frac{\ln t}{2} \frac{1}{1+u}, & 1 < t < e \\ u(1) = 0, & u(e) = \mathcal{J}^{\frac{1}{2}}u(e). \end{cases} \quad (2.4.2)$$

Ici $\alpha = \frac{3}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$, et

$$f(t, u) = \frac{\ln t}{2} \frac{1}{1 + u}$$

on définit

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{\Gamma(\beta + \alpha)}{(\Gamma(\beta + \alpha) - \Gamma(\alpha))} \left(\frac{1}{\Gamma(\beta + \alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \\ &= \frac{3\sqrt{\pi}(2 - \sqrt{\pi})}{16 - \sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Alors on a

$$\begin{aligned} |f(t, u) - f(t, v)| &\leq \frac{1}{2} \left| \ln t \frac{1}{1 + u} - \ln t \frac{1}{1 + v} \right| \\ &\leq \frac{1}{2} |u - v|. \end{aligned}$$

avec

$$L\omega = \frac{1}{2} \frac{3\sqrt{\pi}(2 - \sqrt{\pi})}{16 - \sqrt{\pi}} < 1,$$

la condition (2.3.3) est satisfaite, Par conséquent d'après le théorème 2.3.1, le problème (2.4.2) a une solution unique dans $[1; e]$.

Chapitre 3

Système d'equations différentielles fractionnaires de type Hadamard

Dans ce chapitre, on va étudier l'existence et l'unicité de la solution de problème aux limites d'un système d'equation différentielle fractionnaire de type Hadamard s'écrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^H\mathcal{D}^\alpha u(t) = f(t, u(t), v(t)), \quad 1 < t < e, \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ {}^H\mathcal{D}^\beta v(t) = g(t, u(t), v(t)), \quad 1 < t < e, \quad 1 < \beta \leq 2 \\ u(1) = 0, \quad u(e) = \mathcal{J}^\gamma u(\sigma_1) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_1^{\sigma_1} \log\left(\frac{\sigma_1}{s}\right)^{\gamma-1} \frac{u(s)}{s} ds, \quad \gamma > 0, \quad 1 < \sigma_1 < e \\ v(1) = 0, \quad v(e) = \mathcal{J}^\gamma v(\sigma_2) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_1^{\sigma_2} \log\left(\frac{\sigma_2}{s}\right)^{\gamma-1} \frac{v(s)}{s} ds, \quad \gamma > 0, \quad 1 < \sigma_2 < e \end{array} \right., \quad (3.0.1)$$

où $\mathcal{D}^\delta$, ($\delta = \alpha, \beta$), est la dérivée fractionnaire de Hadamard d'ordre δ , $\mathcal{J}^\gamma$ est l'intégrale fractionnaire d'ordre γ , $f, g : [1; e] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

3.1 Lemmes fondamentaux

Lemme 3.1.1 [1]. Soit $1 < q \leq 2$ et soit $z \in C([1; e], \mathbb{R})$, la solution du problème linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} {}^H\mathcal{D}^q u(t) = z(t) \\ u(1) = 0, \quad u(e) = \mathcal{J}^\gamma u(\theta) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_1^\theta \log\left(\frac{\theta}{s}\right)^{\gamma-1} \frac{u(s)}{s} ds, \quad 1 < \theta < e \end{array} \right., \quad (3.1.1)$$

est équivalent à l'equation intégrale

$$u(t) = \mathcal{J}^q z(t) + \frac{(\log t)^{q-1}}{Q} [\mathcal{J}^{\gamma+q} z(\theta) - \mathcal{J}^q z(e)], \quad (3.1.2)$$

où

$$Q = \frac{1}{1 - \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(\gamma+q)}(\log \theta)^{\gamma+q-1}}, \text{ et } \frac{\Gamma(q)}{\Gamma(\gamma+q)}(\log \theta)^{\gamma+q-1} \neq 1$$

Preuve. La solution de l'équation différentielle (3.1.1), peut être écrit comme

$$u(t) = \mathcal{J}^q z(t) + C_1(\log t)^{q-1} + C_2(\log t)^{q-2}, \quad (3.1.3)$$

où C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

Maintenant, en utilisant la condition initiale $u(1) = 0$ on trouve $C_2 = 0$ et

$$C_1 = \frac{1}{1 - \int_1^\theta (\log \frac{\theta}{s})^{\gamma-1} \frac{(\log s)^{q-1}}{s} ds} [\mathcal{J}^{\gamma+q} z(\theta) - \mathcal{J}^q z(e)],$$

substituant les valeurs de C_1 et C_2 dans (3.1.3) nous obtenons l'équation (3.1.2). ■

Lemme 3.1.2 [1]. Soit $1 < \alpha \leq 2$, $1 < \beta \leq 2$ et $z_1, z_2 \in C([1; e], \mathbb{R})$. La solution du problème linéaire

$$\begin{cases} {}^H\mathcal{D}^\alpha u(t) = z_1(t), \quad 1 < t < e, \quad 1 < \alpha \leq 2 \\ {}^H\mathcal{D}^\beta v(t) = z_2(t), \quad 1 < t < e, \quad 1 < \beta \leq 2 \\ u(1) = 0, \quad u(e) = \mathcal{J}^\gamma u(\sigma_1) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_1^{\sigma_1} \log(\frac{\sigma_1}{s})^{\gamma-1} \frac{u(s)}{s} ds, \quad \gamma > 0, \quad 1 < \sigma_1 < e \\ v(1) = 0, \quad v(e) = \mathcal{J}^\gamma v(\sigma_2) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_1^{\sigma_2} \log(\frac{\sigma_2}{s})^{\gamma-1} \frac{v(s)}{s} ds, \quad \gamma > 0, \quad 1 < \sigma_2 < e \end{cases},$$

est équivalent à le système d'équation intégrable

$$\begin{aligned} u(t) &= \mathcal{J}^\alpha z_1(t) + \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{Q_1} [\mathcal{J}^{\gamma+\alpha} z_1(\sigma_1) - \mathcal{J}^\alpha z_1(e)], \\ v(t) &= \mathcal{J}^\beta z_2(t) + \frac{(\log t)^{\beta-1}}{Q_2} [\mathcal{J}^{\gamma+\beta} z_2(\sigma_2) - \mathcal{J}^\beta z_2(e)], \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{1}{1 - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}(\log \sigma_1)^{\gamma+\alpha-1}}, \text{ et } \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma+\alpha)}(\log \sigma_1)^{\gamma+\alpha-1} \neq 1. \\ Q_2 &= \frac{1}{1 - \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma+\beta)}(\log \sigma_2)^{\gamma+\beta-1}}, \text{ et } \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma+\beta)}(\log \sigma_2)^{\gamma+\beta-1} \neq 1. \end{aligned}$$

Preuve. D'après le lemme 3.1.1, posons $q = \alpha$, $\theta = \sigma_1$ et $q = \beta$, $\theta = \sigma_2$ respectivement.

■

3.2 Résultats d'existence et d'unicité

Introduisons l'espace $X = \{u(t) / u \in C([1; e], \mathbb{R})\}$ muni de la norme

$$\|u\| = \max_{t \in [1; e]} |u(t)|.$$

Evidemment $(X; \|u\|)$ est un espace de Banach. Aussi $Y = \{v(t) / v \in C([1; e], \mathbb{R})\}$ muni de la norme

$$\|v\| = \max_{t \in [1; e]} |v(t)|,$$

aussi $(Y; \|v\|)$ est un espace de Banach.

Ensuite, l'espace produit $(X \times Y; \|(u, v)\|)$ est aussi un espace de Banach muni de la norme

$$\|(u, v)\| = \|u\| + \|v\|.$$

On définit l'opérateur $T : X \times Y \rightarrow X \times Y$ par

$$T(u, v)(t) = \begin{pmatrix} T_1(u, v)(t) \\ T_2(u, v)(t) \end{pmatrix} \quad (3.2.1)$$

où

$$\begin{aligned} T_1(u, v)(t) = & \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s, u(s), v(s))}{s} ds \\ & + \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{A} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma + \alpha)} \int_1^{\sigma_1} \left(\log \frac{\sigma_1}{s}\right)^{\gamma + \alpha - 1} \frac{f(s, u(s), v(s))}{s} ds \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{f(s, u(s), v(s))}{s} ds \right]. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

et

$$\begin{aligned} T_2(u, v)(t) = & \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\beta-1} \frac{g(s, u(s), v(s))}{s} ds \\ & + \frac{(\log t)^{\beta-1}}{B} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma + \beta)} \int_1^{\sigma_2} \left(\log \frac{\sigma_2}{s}\right)^{\gamma + \beta - 1} \frac{g(s, u(s), v(s))}{s} ds \right. \\ & \left. - \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\beta-1} \frac{g(s, u(s), v(s))}{s} ds \right]. \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1 - \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma + \alpha)} (\log \sigma_1)^{\gamma + \alpha - 1}}, & B &= \frac{1}{1 - \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma + \beta)} (\log \sigma_2)^{\gamma + \beta - 1}} \\ \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\gamma + \alpha)} (\log \sigma_1)^{\gamma + \alpha - 1} &\neq 1, & \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\gamma + \beta)} (\log \sigma_2)^{\gamma + \beta - 1} &\neq 1 \end{aligned}.$$

Nous définissons

$$M_1 = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{1}{|A|} \left(\frac{(\log \sigma_1)^{\gamma+\alpha}}{\Gamma(\gamma+\alpha+1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \right), \quad (3.2.4)$$

$$M_2 = \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{1}{|B|} \left(\frac{(\log \sigma_2)^{\gamma+\beta}}{\Gamma(\gamma+\beta+1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \right). \quad (3.2.5)$$

Théorème 3.2.1 [1]. *Supposons que :*

Il existe des constantes réelles $k_i, \lambda_i \geq 0$, ($i = 1, 2$) et $k_0 > 0, \lambda_0 > 0$ telles que $\forall x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2$, on a

$$\begin{aligned} |f(t, x_1, x_2)| &\leq k_0 + k_1 |x_1| + k_2 |x_2|, \\ |g(t, x_1, x_2)| &\leq \lambda_0 + \lambda_1 |x_1| + \lambda_2 |x_2|, \end{aligned}$$

avec

$$M_1 k_1 + M_2 \lambda_1 < 1 \text{ et } M_1 k_2 + M_2 \lambda_2 < 1$$

où M_1 et M_2 est donnée par (3.2.4) et (3.2.5) respectivement.

Alors le système (3.0.1) admet au moins une solution dans $[1; e]$.

Preuve. Tout d'abord, nous montrons que l'opérateur $T : X \times Y \rightarrow X \times Y$ définie par (3.2.1) est complément continu. Par la continuité de la fonction f et g , l'opérateur T est évidemment continu.

Soit $\Omega \subset X \times Y$ est bornée. Alors il existe des constantes positives L_1 et L_2 telles que

$$|f(t, u(t), v(t))| \leq L_1, \quad |g(t, u(t), v(t))| \leq L_2, \quad \forall (u, v) \in \Omega.$$

Alors pour tout $(u, v) \in \Omega$, on a

$$\begin{aligned} |T_1(u, v)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{|f(s, u(s), v(s))|}{s} ds \\ &\quad + \frac{(\log t)^{\alpha-1}}{|A|} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+\alpha)} \int_1^{\sigma_1} \left(\log \frac{\sigma_1}{s} \right)^{\gamma+\alpha-1} \frac{|f(s, u(s), v(s))|}{s} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{|f(s, u(s), v(s))|}{s} ds \right]. \\ &\leq \frac{L_1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \\ &\quad + \frac{L_1}{|A|} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma+\alpha)} \int_1^{\sigma_1} \left(\log \frac{\sigma_1}{s} \right)^{\gamma+\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s} \right)^{\alpha-1} \frac{1}{s} ds \right], \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$\|T_1(u, v)(t)\| \leq L_1 \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} + \frac{1}{|A|} \left(\frac{(\log \sigma_1)^{\gamma + \alpha}}{\Gamma(\gamma + \alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \right\} = L_1 M_1.$$

De même, nous obtenons

$$\|T_2(u, v)(t)\| \leq L_2 \left\{ \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} + \frac{1}{|B|} \left(\frac{(\log \sigma_2)^{\gamma + \beta}}{\Gamma(\gamma + \beta + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} \right) \right\} = L_2 M_2.$$

Il résulte donc l'opérateur T est uniformément borné.

Ensuite, nous montrons que T est équicontinue.

Soient $\tau_1, \tau_2 \in [1; e]$ avec $\tau_1 < \tau_2$. Alors nous avons

$$\begin{aligned} |T_1(u, v)(\tau_2) - T_1(u, v)(\tau_1)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left| \int_1^{\tau_2} (\log \frac{\tau_2}{s})^{\alpha-1} \frac{|f(s, u(s), v(s))|}{s} ds - \int_1^{\tau_1} (\log \frac{\tau_1}{s})^{\alpha-1} \frac{|f(s, u(s), v(s))|}{s} ds \right| \\ &\quad + \left| \frac{(\log \tau_2)^{\alpha-1} - (\log \tau_1)^{\alpha-1}}{A} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta + \alpha)} \int_1^{\sigma_1} (\log \frac{\sigma_1}{s})^{\beta + \alpha - 1} \frac{|f(s, u(s), v(s))|}{s} ds - \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e (\log \frac{e}{s})^{\alpha-1} \frac{|f(s, u(s), v(s))|}{s} ds \right] \right| \\ &\leq \frac{L_1}{\Gamma(\alpha + 1)} [|(\log \tau_2)^\alpha - (\log \tau_1)^\alpha| + 2(\log(\frac{\tau_2}{\tau_1}))^\alpha] \\ &\quad + L_1 \left| \frac{(\log \tau_2)^{\alpha-1} - (\log \tau_1)^{\alpha-1}}{A} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma + \alpha + 1)} (\log \sigma_1)^{\gamma + \alpha} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right] \right|. \end{aligned}$$

De même, nous obtenons

$$\begin{aligned} |T_2(u, v)(\tau_2) - T_2(u, v)(\tau_1)| &\leq \frac{L_2}{\Gamma(\beta + 1)} [|(\log \tau_2)^\beta - (\log \tau_1)^\beta| + 2(\log(\frac{\tau_2}{\tau_1}))^\beta] \\ &\quad + L_2 \left| \frac{(\log \tau_2)^{\beta-1} - (\log \tau_1)^{\beta-1}}{B} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma + \alpha + 1)} (\log \sigma_2)^{\gamma + \beta} + \frac{1}{\Gamma(\beta + 1)} \right] \right|. \end{aligned}$$

Donc l'opérateur $T(u, v)$ est équicontinue, Alors l'opérateur $T(u, v)$ est complément continu.

Enfin, il sera montré que l'ensemble

$$\mathcal{E} = \{(u, v) \in X \times Y \mid (u, v) = \lambda T(u, v), \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

est borné.

Soit $(u, v) \in \mathcal{E}$, alors $(u, v) = \lambda T(u, v)$ pour tout $t \in [1, e]$ on a

$$u(t) = \lambda T_1(u, v)(t), \quad v(t) = \lambda T_2(u, v)(t),$$

alors

$$|u(t)| \leq \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \frac{1}{|A|} \left(\frac{(\log \sigma_1)^{\gamma + \alpha}}{\Gamma(\gamma + \alpha + 1)} + \frac{1}{\Gamma(\alpha + 1)} \right) \right\} (k_0 + k_1 \|u\| + k_2 \|v\|),$$

et

$$|v(t)| \leq \left\{ \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} + \frac{1}{|B|} \left(\frac{(\log \sigma_2)^{\gamma+\beta}}{\Gamma(\gamma+\beta+1)} + \frac{1}{\Gamma(\beta+1)} \right) \right\} (\lambda_0 + \lambda_1 \|u\| + \lambda_2 \|v\|),$$

par conséquent, nous avons

$$\|u\| \leq M_1(k_0 + k_1 \|u\| + k_2 \|v\|),$$

et

$$\|v\| \leq M_2(\lambda_0 + \lambda_1 \|u\| + \lambda_2 \|v\|),$$

ce qui implique que

$$\|u\| + \|v\| \leq (M_1 k_0 + M_2 \lambda_0) + (M_1 k_1 + M_2 \lambda_1) \|u\| + (M_1 k_2 + M_2 \lambda_2) \|v\|,$$

Par conséquence

$$\|(u, v)\| \leq \frac{M_1 k_0 + M_2 \lambda_0}{M_0},$$

pour tout $t \in [1; e]$, où M_0 est définie par

$$M_0 = \min\{1 - (M_1 k_1 + M_2 \lambda_1), 1 - (M_1 k_2 + M_2 \lambda_2)\},$$

cela prouve que $\mathcal{E}$ est borné ainsi par le théorème 2.1.3, l'opérateur T a au moins un point fixe, donc le système (3.0.1) admet au moins une solution dans $[1; e]$. ■

Dans le deuxième résultat, nous prouvons que l'unicité de la solution pour le système (3.0.1) via le principe de la cartographie de contraction Banach

Théorème 3.2.2 [1]. *Supposons que $f, g : [1; e] \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, et il existe des constantes positives $m_i, n_i, i = 1, 2$ telles que pour tout $t \in [1; e]$ et $u_i, v_i \in \mathbb{R}$*

$$|f(t, u_1, u_2) - f(t, v_1, v_2)| \leq m_1 |u_1 - v_1| + m_2 |u_2 - v_2|,$$

et

$$|g(t, u_1, u_2) - g(t, v_1, v_2)| \leq n_1 |u_1 - v_1| + n_2 |u_2 - v_2|.$$

Alors le système (3.0.1) admet une solution unique dans $[1, e]$ si

$$M_1(m_1 + m_2) + M_2(n_1 + n_2) < 1, \tag{3.2.6}$$

où M_1 et M_2 sont donnés par (3.2.4) et (3.2.5) respectivement.

Preuve. On définit $\sup_{t \in [1;e]} f(t, 0, 0) = N_1 < \infty$, $\sup_{t \in [1;e]} g(t, 0, 0) = N_2 < \infty$, et choisissez

$$r \geq \frac{N_1 M_1 + N_2 M_2}{1 - M_1(m_1 + m_2) - M_2(n_1 + n_2)},$$

nous montrons que $T(B_r) \subset B_r$ où

$$B_r = \{(u, v) \in X \times Y : \|(u, v)\| \leq r\},$$

et l'opérateur T est définie par (3.2.1).

Pour $(u, v) \in B_r$, on a

$$\begin{aligned} |T_1(u, v)(t)| &\leq \max_{t \in [1;e]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s, u(s), v(s))|}{s} ds \right. \\ &\quad + \frac{1}{|A|} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma + \alpha)} \int_1^{\sigma_1} \left(\log \frac{\sigma_1}{s}\right)^{\gamma+\alpha-1} \frac{|f(s, u(s), v(s))|}{s} ds \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s, u(s), v(s))|}{s} ds \right] \right\} \\ &\leq \max_{t \in [1;e]} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{(|f(s, u(s), v(s)) - f(s, 0, 0)| + |f(s, 0, 0)|)}{s} ds \right. \\ &\quad + \frac{1}{|A|} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma + \alpha)} \int_1^{\sigma_1} \left(\log \frac{\sigma_1}{s}\right)^{\gamma+\alpha-1} \frac{(|f(s, u(s), v(s)) - f(s, 0, 0)| + |f(s, 0, 0)|)}{s} ds \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{(|f(s, u(s), v(s)) - f(s, 0, 0)| + |f(s, 0, 0)|)}{s} ds \right] \right\} \\ &\leq M_1 [(m_1 + m_2)r + N_1], \end{aligned}$$

par conséquent

$$\|T_1(u, v)\| \leq M_1 [(m_1 + m_2)r + N_1].$$

De même manière, nous obtenons

$$\|T_2(u, v)\| \leq M_2 [(n_1 + n_2)r + N_2],$$

ainsi, nous avons

$$\|T(u, v)\| \leq r.$$

Maintenant pour $(u_2, v_2), (u_1, v_1) \in X \times Y$, et pour tout on a

$$\begin{aligned}
|T_1(u_2, v_2)(t) - T_1(u_1, v_1)(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^t \left(\log \frac{t}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s, u_2, v_2) - f(s, u_1, v_1)|}{s} ds \\
&\quad + \frac{1}{|A|} \left[\frac{1}{\Gamma(\gamma + \alpha)} \int_1^{\sigma_1} \left(\log \frac{\sigma_1}{s}\right)^{\gamma+\alpha-1} \frac{|f(s, u_2, v_2) - f(s, u_1, v_1)|}{s} ds \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^e \left(\log \frac{e}{s}\right)^{\alpha-1} \frac{|f(s, u_2, v_2) - f(s, u_1, v_1)|}{s} ds \right] \\
&\leq M_1(m_1 \|u_2 - u_1\| + m_2 \|v_2 - v_1\|) \\
&\leq M_1(m_1 + m_2)(\|u_2 - u_1\| + \|v_2 - v_1\|),
\end{aligned}$$

par conséquent, nous obtenons

$$\|T_1(u_2, v_2)(t) - T_1(u_1, v_1)(t)\| \leq M_1(m_1 + m_2)(\|u_2 - u_1\| + \|v_2 - v_1\|), \quad (3.2.7)$$

De même, on peut trouver que

$$\|T_2(u_2, v_2)(t) - T_2(u_1, v_1)(t)\| \leq M_2(n_1 + n_2)(\|u_2 - u_1\| + \|v_2 - v_1\|), \quad (3.2.8)$$

Il suit de (3.2.7) et (3.2.8), nous obtenons

$$\|T_2(u_2, v_2)(t) - T_2(u_1, v_1)(t)\| \leq [M_1(m_1 + m_2) + M_2(n_1 + n_2)](\|u_2 - u_1\| + \|v_2 - v_1\|).$$

Depuis la condition (3.2.6), l'opérateur T est une contraction sur l'espace de Banach $X \times Y$, donc d'après le théorème de point fixe de Banach 2.1.1, l'opérateur T a un point fixe unique, qui est la solution unique de problème aux limites (3.0.1). ■

3.3 Exemple

Dans cette section, nous donnons un exemple pour illustrer l'utilité de nos principaux résultats.

Exemple 3.3.1 *Considère le problème aux limites de système d'équation différentielles fractionnaires suivant*

$$\begin{cases} \mathcal{D}^{\frac{3}{2}} x(t) = \frac{1}{4(t+2)^2} \frac{|u(t)|}{1+|u(t)|} + 1 + \frac{1}{32} \sin^2 v(t), & t \in [1; e] \\ \mathcal{D}^{\frac{3}{2}} x(t) = \frac{1}{32\pi} \sin(2\pi u(t)) + \frac{|v(t)|}{16(1+|v(t)|)} + \frac{1}{2}, & t \in [1; e] \\ u(1) = 0, & u(e) = \mathcal{J}^{\frac{3}{2}} u(2) \\ v(1) = 0, & v(e) = \mathcal{J}^{\frac{3}{2}} u(5/2) \end{cases}, \quad (3.3.1)$$

Dans cet exemple on a $\alpha = 3/2$, $\beta = 3/2$, $\gamma = 3/2$, $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 5/2$ et

$$\begin{aligned} f(t, u, v) &= \frac{1}{4(t+2)^2} \frac{|u(t)|}{1+|u(t)|} + 1 + \frac{1}{32} \sin^2 v(t), \\ g(t, u, v) &= \frac{1}{32\pi} \sin(2\pi u(t)) + \frac{|v(t)|}{16(1+|v(t)|)} + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

avec $A \approx 1.27$, $B \approx 1.59$ et

$$\begin{aligned} |f(t, u_1, u_2) - f(t, v_1, v_2)| &\leq \frac{1}{16} |u_1 - u_2| + \frac{1}{16} |v_1 - v_2|, \\ |g(t, u_1, u_2) - g(t, v_1, v_2)| &\leq \frac{1}{16} |u_1 - u_2| + \frac{1}{16} |v_1 - v_2|. \end{aligned}$$

la condition (3.2.6) est vérifiée

$$M_1(m_1 + m_2) + M_2(n_1 + n_2) \approx 0.43 < 1.$$

Alors d'après le théorème 3.2.2, le problème (3.3.1) a une seule solution dans $[1, e]$.

Conclusion

Dans ce mémoire on a présenté quelques résultats d'existence et d'unicité des solutions du problème aux limites pour des équations et systèmes différentielles d'ordre fractionnaire au sens de Hadamard avec conditions aux limites et intégrales.

Ces résultats ont été obtenus par l'application de la théorie de point fixe, en particulier on a utilisé le théorème de point fixe de Banach, Schaefer et Krasnoselskii, Leray–Schauder Alternative.

Bibliographie

- [1] B. Ahmad, A. Alsaedi, S. K. Ntouyas, J. Tariboon, Hadamard-Type Fractional Differential Equations, Inclusions and Inequalities, Springer International Publishing AG Switzerland (2017).
- [2] B. Ahmad, S. K. Ntouyas, On Hadamard fractional integro-differential boundary value problems. J. Appl. Math. Comput (2015).
- [3] B.,Ahmad, and J. J. Nieto. Existence results for a coupled system of nonlinear fractional differential equations with three-point boundary conditions. Computers and Mathematics with Applications 58:1838-1843, (2009)
- [4] P. L. Butzer, A. A. Kilbas, J.J. Trujillo, *Compositions of Hadamard-type fractional integration operators and the semigroup property*, Journal of Mathematical Analysis and Applications 269, page 387-400, (2002)
- [5] A. Granas, J. Dugundji, Fixed Point Theory. Springer, New York (2003).
- [6] F. Jarad, Thabet and B. Dumitru, *Caputo-type modification of the Hadamard fractional derivatives*, Advances in Difference Equations, page 2-8, (2012).
- [7] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier B.V, Amsterdam, Netherlands, (2006).
- [8] S. G. Samko, A. A. Kilbas and O. I. Marichev, *Fractional intégrais and derivatives theory and applications*, Gordon and Breach, New York, (1993).

- [9] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, California-USA, (1999).
- [10] B. Rubin, *Fractional intégrais and potentials*, Harlow: Longman, (1996).